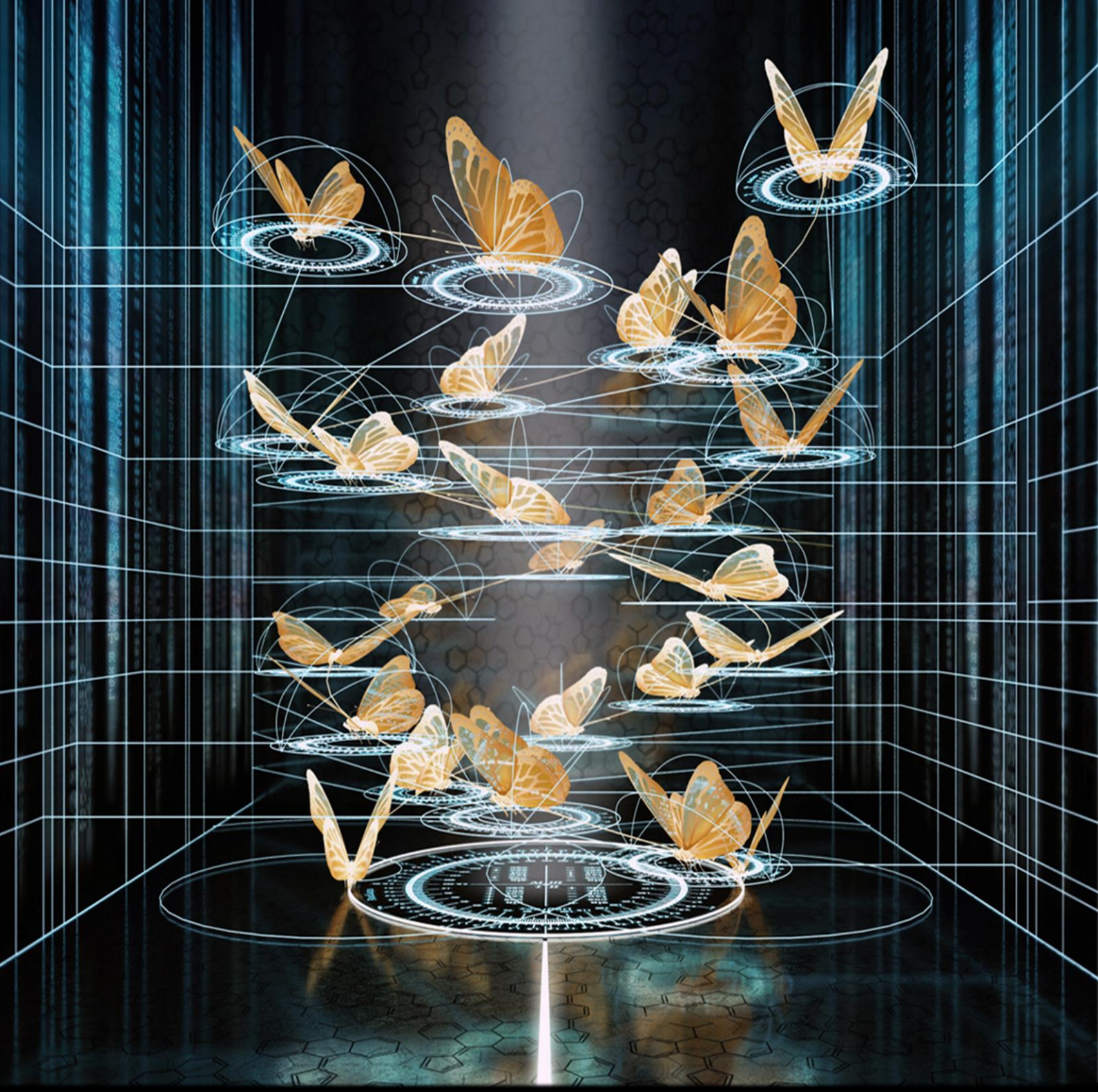


Занятие 0-4.
Тригонометрические уравнения
Задание 13 ЕГЭ

Введение

В этом задании требуется решить уравнение и отобрать корни. По опыту прошлых лет можно сказать, что заданное уравнение, чаще всего, сводится к тригонометрическому уравнению.

Особенности заданий

С помощью этого задания экзаменаторы проверяют, умеете ли вы решать уравнение, знаете ли вы, что такое равносильные преобразования и ОДЗ.

Типы заданий

Тригонометрические уравнения могут быть «отягощены» степенями, формулами, логарифмами – в этом задании может быть «все в одном флаконе».

Совет

Самые серьезные ошибки, распространенные при выполнении этого задания:

- Деление без проверки на ноль: «убирают множитель слева и справа», забывая при этом проверить – а вдруг этот множитель равен нулю.
- Незнание значений тригонометрических функций.
- Незнание формул приведения, формул тригонометрии.

Все эти ошибки приводят получению нуля баллов за это задание.

Иногда за задание получают только один балл из двух, т.к. поверхностно относятся к отбору корней, хотя существуют четкие требования к оформлению пункта *б* (о них расскажут на уроке).

Время, которое вы потратите на выполнение данного задания – 10÷20 минут.

Это надо запомнить для следующего урока!

Уравнения: общие рекомендации

Главным при решении любого уравнения, которое вам попадется на экзамене, является то, что вы сведете его к одному или нескольким простейшим уравнениям.

! ***Простейшие уравнения*** – это линейные, квадратные, а также уравнения вида:

$$a^x = b \qquad \sin x = a \qquad \cos x = a$$

$$\log_a x = b \qquad \frac{a}{x} = b \qquad \sqrt[n]{x} = a$$

Как можно свести уравнение к простейшему?

! Методов очень много, но, чаще всего, применяют следующие:

- разложение на множители, тогда каждую скобку можно будет приравнять к нулю и получить несколько простейших уравнений;
- применение формул и свойств тригонометрии или логарифмов;
- замена переменной, что позволяет получить, например, простенькое квадратное уравнение;
- сведение к квадратному, что можно использовать вместе с предыдущим способом.

Рассмотрим один из методов на примере.

Пример 1.

Решить уравнение $5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0$

Решение:

Перегруппировав слагаемые и вынеся за скобку общие множители, получим:

$$5(x^3 + 1) - 21x(x + 1) = 0$$

Используем формулу суммы кубов:

$$5(x + 1)(x^2 - x + 1) - 21x(x + 1) = 0$$

Вновь вынесем общий множитель за скобки:

$$(x + 1)\cdot(5\cdot(x^2 - x + 1) - 21x) = 0$$

$$(x + 1)\cdot(5x^2 - 26x + 5) = 0$$

Таким образом, исходное уравнение сводится к двум простейшим уравнениям: линейному $x + 1 = 0$, корень которого $x = -1$, и квадратному $5x^2 - 26x + 5 = 0$, корни которого $x_1 = 1/5 = 0{,}2$ и $x_2 = 5$

Ответ: **–1; 0,2** и **1**.

Тригонометрические уравнения

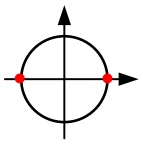
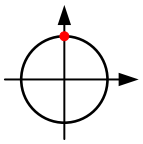
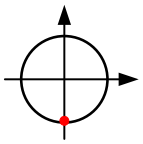
Тригонометрическими называют уравнения, содержащие переменную под знаком тригонометрических функций. Т.е. в тригонометрических уравнениях переменная (или выражение с переменной) является аргументом синуса, косинуса, тангенса и/или котангенса.

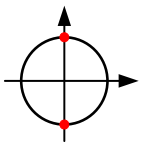
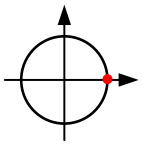
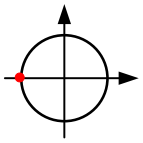
! Каким бы страшным не показалось вам уравнение вначале, сохраняйте спокойствие. Используя всего три фразы «*примени формулу*», «*перенеси всё влево*», «*разложи на множители*», можно прийти к простейшему уравнению.

Простейшие тригонометрические уравнения решаются с помощью тригонометрического круга, после чего с учетом периода записывается их ответ. Напомним решения простейших тригонометрических уравнений и наиболее распространенные их частные случаи.

!

Простейшие тригонометрические уравнения	
Уравнение	**Ответ**
$\sin x = a$ $\lvert a \rvert \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi \cdot n, \quad n \in Z$
$\cos x = a$ $\lvert a \rvert \le 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi \cdot n, \quad n \in Z$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi \cdot n, \quad n \in Z$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi \cdot n, \quad n \in Z$

Частные случаи	
	$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi \cdot n, \quad n \in Z$ $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi \cdot n, \quad n \in Z$
	$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n, \quad n \in Z$
	$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n, \quad n \in Z$

Частные случаи	
	$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n, \quad n \in Z$ $\operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n, \quad n \in Z$
	$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi \cdot n, \quad n \in Z$
	$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi \cdot n, \quad n \in Z$

! Обратите внимание: в тригонометрии получаются ответы, которые называют «***серии решений***». Это означает, что у уравнения очень много разных ответов, которые отличаются на одно и то же число. Это число называют ***периодом***.

! Для синуса и косинуса период равен **2π**, а для тангенса и котангенса – **π**.

! Записывая серии решений, можно использовать любые буквы, например, ***n***, ***k***, ***m*** и т.д.: $2\pi n, 2\pi k, 2\pi m$ и т.д., главное, не забыть указать, что *их значения принадлежат множеству целых чисел* **Z**: $n \in Z$ ($k \in Z, m \in Z$).

Обязательно помните, что **значения синуса и косинуса по модулю не могут превышать единицы**:

!

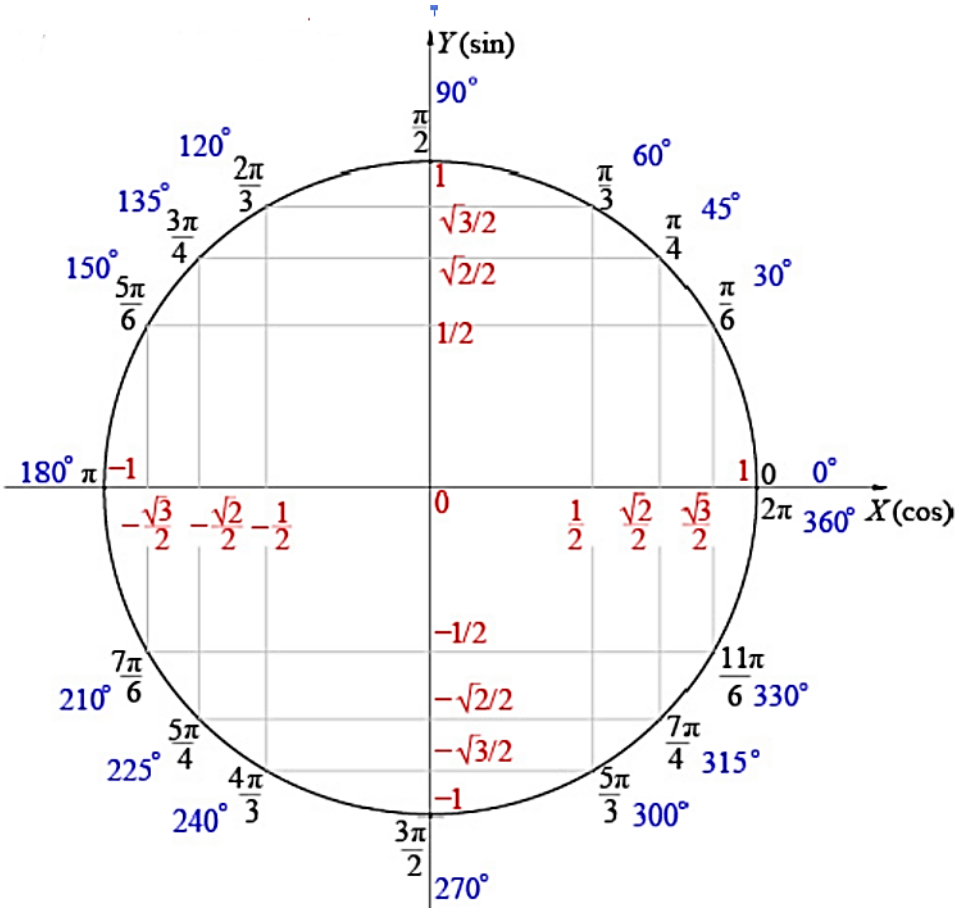
$$-1 \le \sin x \le 1$$
$$-1 \le \cos x \le 1$$

Если при решении уравнения (например, методом замены переменной) у вас получился ответ, не входящий в этот промежуток, то такой ответ вам не нужен!

Тригонометрический круг

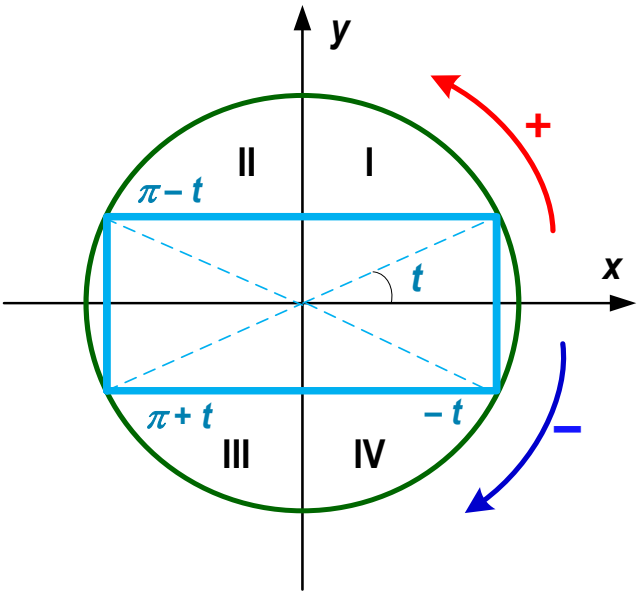
Этот круг и таблицу мы даём как справочный материал.

! Вам **необходимо знать значения синусов и косинусов** указанных углов. Обратите внимание, что углы в заданиях могут быть заданы как в градусах (например, **120°**), так и в радианах (например, $\frac{2\pi}{3}$).



α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sinα	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	**0**	**–1**	**0**
cosα	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	**–1**	**0**	**1**
tgα	**0**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$		**0**		**0**
ctgα		$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**0**		**0**	

! На самом деле можно выучить лишь значения для углов первой четверти, остальные углы для ответа можно выбирать, используя круг ниже. Этот круг позволит вам не запоминать, как пишется ответ для простейших уравнений (все эти «арки»….).



Как использовать этот круг? Предположим, вы выучили значения тригонометрических функций для углов первой четверти и записали требуемый угол t (из I четверти). А к ответу подходит еще и угол из II четверти. На круге видно, чтобы его найти надо из π вычесть известный угол t, чтобы получить второй ответ.

Рассмотрим использование круга на примере.

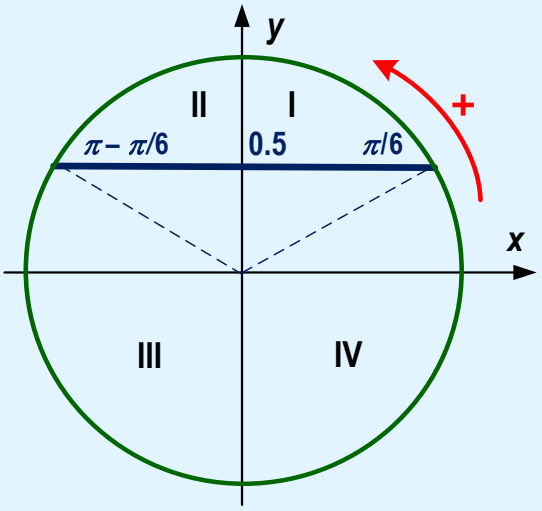
Пример 2.

Решить уравнение $\sin x = 0.5$.

Решение:

Вспомним, что в первой четверти такой синус имеет угол $\frac{\pi}{6}$.

Далее чертим маленький круг, чтобы посмотреть, у какого угла еще такой же синус (синусы находятся на оси *Oy*).



Как видно из круга, это угол $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Теперь можно записать ответ.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ \ n, k \in Z$

Мы обошлись без аркфункций, это хорошо, т.к. эти «арки» могут быть очень коварными. Записал вместо них угол не из той четверти и получил ноль баллов. А в нашем решении мы опираемся на круг, все обоснованно. Получили две серии решений, для каждой из которых используем свою букву: n, k.

Какие формулы надо знать?

Значения для углов первой четверти надо выучить, без них, как вы увидели, нельзя решить даже простейшее уравнение. Но к этому простейшему надо еще прийти. Какие же формулы нам в этом помогут? Ниже приведены формулы тригонометрии, которые необходимо выучить.

Основное тригонометрическое тождество
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ⇗ $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ ⇘ $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$
Основные формулы
$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ⇨ $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$
Формулы двойных углов
$\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ ⇨ $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
Формулы суммы
$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Формулы приведения

Иногда их дают в виде большой таблицы, но лучше выучить правило:

1) Определить **четверть**.

2) Определить **знак исходной функции** в этой четверти

3) Если аргумент приводимой функции имеет вид $\left(\frac{\pi}{2}\pm t\right)$ или $\left(\frac{3\pi}{2}\pm t\right)$, то **функция меняется на кофункцию**

4) Если аргумент приводимой функции имеет вид $(\pi\pm t)$ или $(2\pi\pm t)$, то **функция НЕ меняется на кофункцию**

Например:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\sin t$$

$$\sin(2\pi-t)=-\sin t$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ+t)=\operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ-t)=\operatorname{tg} t$$

Отбор корней

! Слова «отбор корней» означают, что в ответ мы будем записывать *не все* корни, которые получили при решении. Вспомните, когда мы пишем ОДЗ, после этого полученные корни мы проверяем. Если они ОДЗ не соответствуют, мы говорим, что это посторонние корни и их отбрасываем.

Здесь почти все то же самое, т.к. отбор корней может быть:

- из-за ОДЗ;
- потому, что нас в условии попросят найти корни, которые удовлетворяют определенным условиям.

Во втором случае мы не запишем в ответ некоторые корни не потому, что они посторонние (они «хорошие»), просто нас попросили найти корни с определенными свойствами. Например, хотят, чтобы корни входили в отрезок от 0 до 17, или принадлежали интервалу $[\pi;\ 4\pi]$.

Как производят тогда отбор? Есть несколько способов, мы рассмотрим два самых распространенных:

- с помощью числовой окружности или круга;
- с помощью неравенств.

Пример 1.

Дано уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x$

Необходимо:

а) решить уравнение;

б) найти корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$

Решение:

а) Воспользовавшись формулой приведения $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\sin 2x$, перейдем к уравнению:

$$\sin 2x=\cos x$$

Перенесем всё в левую часть уравнения:

$$\sin 2x-\cos x=0$$

Воспользовавшись формулой синуса двойного угла, получим:

$$2\sin x\cdot\cos x-\cos x=0$$

Вынесем за скобки общий множитель:

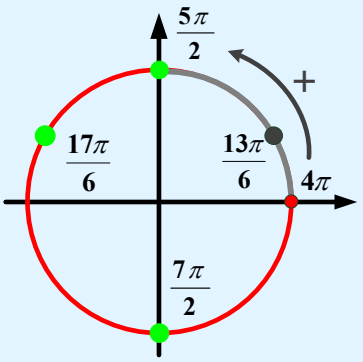
$$\cos x\cdot(2\sin x-1)=0$$

Значит, либо $\cos x=0$, либо $2\sin x-1=0 \Rightarrow \sin x=0.5$

Решая простейшие тригонометрические уравнения $\cos x=0$ и $\sin x=0.5$, получим:

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;\quad x=\frac{\pi}{6}+2\pi m,\ m\in Z;\quad x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$$

б) Отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$. Для этого на единичной окружности **отметим дугу**, соответствующую данному отрезку (напомним, что направление «от меньшего к большему» – это направление против часовой стрелки) и **точки**, соответствующие найденным в пункте *а)* корням. Теперь мы видим, что искомыми корнями являются:



$$\frac{5\pi}{6};\quad \frac{17\pi}{6};\quad \frac{7\pi}{2}$$

Ответ: ***а)*** $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;\quad x=\frac{\pi}{6}+2\pi m,\ m\in Z;\quad x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$

б) $\frac{5\pi}{6};\quad \frac{17\pi}{6};\quad \frac{7\pi}{2}$

Отбор корней с помощью неравенств мы покажем ниже в задача ЕГЭ.

Алгоритм решения

- Записать, если есть ОДЗ.
- Вспомнить формулы; применив их, привести уравнение к простейшим уравнениям.
- Решить простейшие уравнения. Отобрать корни на ОДЗ.
- В пункте *б)* выполнить отбор корней любым способом, который вам кажется более удобным.
- Записать ответы для пунктов *а)* и *б)*

Типичные ошибки

- Основные проблемы связаны с неумением решать простейшие тригонометрические уравнения.
- Большое количество ошибок обусловлено неумением отбирать корни.
- Еще один источник ошибок – неверное применение тригонометрических формул.
- Небольшое количество ошибок связано с арифметикой.

Критерии

- По критериям за данное задание можно получить 0 баллов, 1 балл или 2 балла. Более подробно вам расскажет о критериях преподаватель на занятии.

Теперь мы готовы рассмотреть реальную задачу из экзамена

Задача ЕГЭ

Решите уравнение $6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$. Укажите корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $[-\pi;\ 2\pi]$

Решение

Сделав замену переменной $y = \cos x$, получим квадратное уравнение $6y^2 - 7y - 5 = 0$. Его корнями являются $y_1 = -\frac{1}{2}$ и $y_2 = \frac{5}{3}$.

Уравнение $\cos x = \frac{5}{3}$ не имеет решений, т.к. косинус не может превышать единицу.

Из уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ находим $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$ и $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z$

Отберем корни, решив неравенства:

$$-\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 2\pi \text{ и } -\pi \le -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m \le 2\pi$$

Из первого неравенства получим $-\frac{5}{6} \le k \le \frac{2}{3}$. Единственное целое число, которое удовлетворяет данному неравенству – ноль (т.е. $k = 0$). Следовательно, искомый корень $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 0 = \frac{2\pi}{3}$

Из второго неравенства получим

$$-\frac{1}{6} \le m \le \frac{4}{3} \ \Rightarrow\ m = 0 \text{ и } m = 1 \ \Rightarrow\ x = -\frac{2\pi}{3} \text{ и } x = \frac{4\pi}{3}$$

Ответ: *а)* $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z$; *б)* $-\frac{2\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3}$

ВНИМАНИЕ!

Прочитайте теорию очень внимательно, только после этого можно приступить к выполнению задания в рабочей тетради, где встретятся задания по данной и предыдущей темам.

Возьмите лист бумаги, выполните все задания и пришлите на почту преподавателю до следующего занятия.